Cristina Laura Ștefan Mugurel Ștefan

MATEMATICĂ

Exerciții și teste de evaluare pentru BACALAUREAT

M1-M2

NICULESCU

Cuprins

Capitolul I

ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE – Clasele 9-10

Numere reale

Testul 1

1. Calculați $|\sqrt{5}-\sqrt{7}|$.

2. Calculați $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]$.

3. Calculați $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$.

4. Calculați $\{7, 23\}$.

5. Calculați $\{-2, 32\}$.

6. Calculați $\left[\frac{767}{122}\right]$.

7. Calculați $[8\sqrt{2}]$.

8. Calculați suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$.

9. Calculați suma $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}$.

Testul 2

1. Să se arate că numărul $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+1)^2 \in \mathbb{N}$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1-|x|}{3}-\frac{3|x|-7}{4}=\frac{1}{2}$.

3. Găsiți două numere reale a și b cu proprietatea $[a] = 2$, $[b] = 3$ și $[a + b] = 6$.

4. Calculați $\{3, 88\} - \{-5, 88\}$.

5. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |z| \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < 2x \leq 5\}$. Aflați $A \cap B$.

6. Demonstrați că $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 \geq 0$ $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Arătați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, $\forall$ $a\,b > 0$.

8. Arătați că numărul $\sqrt{3}-\sqrt{4+\sqrt{12}} \in \mathbb{Z}$.

9. Aflați x și y pentru care $\frac{x\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Q}$.

Testul 3

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|3x-7| = 10$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{8x+3}{2}\right] = 2$.

3. Calculați $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$.

4. Fie numerele $a=\frac{3}{7}$ și $b=\frac{4}{11}$. Calculați $1 - a$ și $1 - b$ și apoi comparați-le.

5. Rezolvați ecuația $\frac{2x-1}{[\sqrt{3}]}+\frac{3-x}{[\sqrt{5}]}=1.$

6. Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2}\in(-\infty;1)$

7. Determinați mulțimea $\left[\frac{-13}{3},\frac{3}{2}\right]\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}).$

8. Calculați $\left|7,(2)-\frac{43,2}{6}\right|.$

9. Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{5}{2x-1}\in\mathbb{Z}\}.$

Testul 4

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2}\,x+1=x-\sqrt{2}$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|3-x|(2x-4)>0$.

3. Determinați cel mai mare număr întreg din intervalul $(-\infty;\sqrt{5})$ și cel mai mic număr întreg din intervalul $(-\sqrt{10};+\infty)$.

4. Calculați $(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)+(\sqrt{2}-1)^2$.

5. Dacă $3-2y=8$, calculați $A=9x^2-16-12xy+4y^2$.

6. Calculați $[2+\sqrt{15}]$.

7. Fie mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x}{3}-5x<4\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid [x+3]=2\}$. Calculați $A\cap B$.

8. Determinați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{7}{n+2}\in\mathbb{Z}$.

9. Calculați $a=\{-18,12\}-\{5,88\}$.

Logică și inducție

Testul 1

1. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „$|3-2x|>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$."

2. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „$\exists x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{7}{2}-3x=8$."

3. Să se calculeze suma $1+2+3+\ldots+33$.

4. Să se demonstreze că $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional".

6. Arătați că $((p\vee q)\wedge\neg p)\rightarrow q$ este tautologie.

7. Să se determine complementara în raport cu $\mathbb{R}$ a mulțmii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\}$.

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „orice triunghi dreptunghic are cel puțin un unghi ascuțit”.

9. Demonstrați că $9^n - 1$ se divide cu 8, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Testul 2

1. Calculați suma $1^3 + 2^3 + ... + 10^3$.

2. Demonstrați că $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „$\exists\, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2n - 1 < 0$”.

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ are două elemente”.

5. Demonstrați că $2^n \geq 2n - 1$, $\forall\, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

6. Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid [4x - 1] = 2\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 - x^2 = 0\}$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „$\sqrt{18} \in \left[\frac{41}{10}; \frac{43}{10}\right]$”.

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional”.

9. Demonstrați echivalența $p \wedge q \leftrightarrow \rceil(\rceil p \vee \rceil q)$.

Testul 3

1. Fie $I = (-12, 12)$ și $J = (0, 13]$. Calculați $I \cap J$ și $I \cup J$

2. Fie intervalul $I = [0,1; 0,2]$. Găsiți $x \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x \in I$.

3. Este adevărat că $\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{3+\sqrt{8}} \in \mathbb{Q}$?

4. Demonstrați că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

5. Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n^3 - n \;\vdots\; 6$.

6. Să se arate că $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

7. Să se arate că $3^{2n+1} + 2^{n+2} \;\vdots\; 7$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

8. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a implicației: „Dacă $|x| < 2$ și $|y| < 2$, atunci $\left|\frac{2(x+y)}{4+xy}\right| < 1$”.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „$[\sqrt{n^2+n}] = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.”

Progresii

Testul 1

1. Fie progresia aritmetică 3, 7, x,..., y, 23,... Aflați x și y.

2. Într-o progresie aritmetică cunoaștem $a_5 = 8$ și $r = 2$. Aflați a_{10}.

3. Calculați $2 + 7 + 12 + \ldots + 52$.

4. Aflați rația unei progresii aritmetice, știind că $a_3 = 14$ și $a_7 = 2$.

5. Știind că într-o progresie aritmetică avem $a_{10} + a_{14} = 22$, calculați $a_6 + a_{18}$.

6. Calculați suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice în care $a_1 = 4$ și $r = 6$.

7. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că $7, x + 1, 4x - 3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

8. Este șirul $a_n = 4n + 5$, $n \in \mathbb{N}^*$, o progresie aritmetică?

9. În progresia aritmetică a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, cunoștem $a_5 = 8$ și $S_{10} = 100$. Aflați rația progresiei.

Testul 2

1. Aflați x și y din progresia geometrică $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, x, \ldots, y, \frac{1}{1024}$.

2. Calculați $3 + 9 + 27 + \ldots + 6\,561$.

3. Într-o progresie geometrică cunoaștem $a_2 = 6$ și $a_6 = 96$. Aflați rația.

4. Într-o progresie geometrică cunoaștem $a_1 = 3$ și $q = 2$. Aflați suma primilor 6 termeni.

5. Fie șirul $b_n = 4 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Este șirul o progresie geometrică?

b) Este numărul 972 termen al șirului?

6. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că $2, 3x - 1, 4 + x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

7. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{3n} = 8\,190$.

8. Să se calculeze suma $6^2 + 6^3 + 6^4 + \ldots + 6^{20}$.

9. Fie ecuația $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ cu rădăcinile reale x_1 și x_2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că $x_1, 3, x_2$ formează o progresie geometrică.

Testul 3

1. Numerele $x, y, 3$ formează o progresie aritmetică, iar x, y și 6 formează o progresie geometrică. Aflați x și y.

2. Rezolvați ecuația $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 100) = 505$.

3. Să se determine progresia aritmetică cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este $S_n = n^2 + 2n$, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

4. Să se studieze dacă șirul $b_n = 3^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ este progresie geometrică.

5. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știm că $a_2 + a_4 = 8$ și că rația este $r = 1$. Să se afle a_{10}.

6. Calculați $S = 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{43}$.

7. Fie b_n o progresie geometrică şi S_n suma primilor n termeni ai săi. Să se afle S_9, ştiind că $S_3 = 40$ şi $S_6 = 60$.

8. Suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice este 7, iar suma următorilor trei termeni este 56. Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai progresiei.

9. Arătaţi că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Testul 4

1. Să se scrie primii 5 termeni ai unei progresii aritmetice ştiind că $\begin{cases} a_5 + a_1 = 16 \\ a_4 - a_2 = 6 \end{cases}$.

2. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + 3$, $x - 4$, $x - 5$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

3. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică cu suma 90 şi raportul între primul şi al treilea termen $\frac{1}{11}$.

4. Numerele reale a, b, c sunt în progresie aritmetică de raţie r, iar numerele a, $b + 1$, $c + 6$ sunt în progresie geometrică de raţie 3. Să se determine a, b, c.

5. Pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic în progresie geometrică?

6. Fie progresia aritmetică în care $a_{30} = 1\,000$ şi $a_{10} = 100$. Să se determine S_{300}.

7. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice, ştiind că $\begin{cases} a_5 - a_4 - a_3 = 4 \\ a_5 - a_4 = 2a_3 \end{cases}$.

8. Să se calculeze suma $17 + 20 + 23 + ... + 71$.

9. Să se calculeze suma $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + ... + \frac{1}{5^{15}}$.

Funcţii (noţiuni generale)

Testul 1

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Studiaţi paritatea funcţiei.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$. Studiaţi monotonia funcţiei.

3. Determinaţi a şi b numere reale astfel încât graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să conţină punctele $A(1, 3)$ şi $B(-1, 6)$.

4. Este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^4 + 1}$ impară? Dar funcţia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^4 + 1}$?

5. Să se determine a şi b numere reale astfel încât graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5ax - b - 2$ să treacă prin punctele $A(0, 1)$ şi $B(2, -1)$.

6. Să se determine $D \subset \mathbb{R}$ domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2-x}$.

7. Să se studieze mărginirea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (-1)^{[x]}$.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, f(n) =$ *ultima cifră a numărului* 7^n. Să se arate că funcția este periodică și să se precizeze perioada principală.

9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x + 4$. Calculati $f \circ g$ și $g \circ f$.

Testul 2

1. Fie $f, g: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}, f(x) = x^2, g(x) = |x|$. Arătați că cele două funcții sunt egale.

2. Arătați că funcția $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ este mărginită.

3. Determinați imaginea funcției $f: [0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ -3, & x \in (1,3) \end{cases}$.

4. Studiați paritatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}$.

5. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) =$ *restul împărțirii lui x la* 5 este periodică și determinați perioada ei principală.

6. Studiați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$. Calculați $f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots + f(f(15))$.

8. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$. Determinati funcția știind că $(f \circ f)(x) = 3f(x) + 7$.

9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 4$. Studiați monotonia și paritatea funcției.

Testul 3

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x - 1$. Desenați graficul funcției folosind punctele de intersecție cu axele.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați funcția, știind că graficul ei trece prin punctele $A(2, 3), B(-2, 6)$.

3. Rezolvați inecuatia $(x + 1)(7 - 3x) < 0$.

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2}{m+1}x - 3$ să fie strict descrescătoare.

5. Rezolvați ecuația $|2x - 1| + |3 - x| = 7$.

6. Găsiți funcțiile de gradul I strict descrescătoare astfel încât $f \circ f \circ f = f$.

7. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 - 2x$. Calculați: $f(-3) + f(-2) + \ldots + f(10)$.

8. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 3m$ să fie pozitivă doar pe intervalul $[3, \infty)$

9. Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 2$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 1 + 3x$.

Testul 4

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x + 1$. Calculați $f(2^2) + f(2^3) + ... + f(2^{20})$.

2. Rezolvați inecuatia $\dfrac{3x-7}{9x+2} \geq 2$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 + 1)x - 2m - 4$. Determinați $m > 0$ astfel încât punctul $A(1, 5) \in G_f$.

4. Rezolvați inecuatia $|4 - x| - |x + 7| \leq 1$.

5. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3a+5}{9a-2}x - 1$ să fie strict crescătoare.

6. Determinați valorile parametrului real m astfel încât dreptele de ecuații $(m + 2)x - 3 = y$ și $6x + 4 = y$ să fie paralele.

7. Rezolvați sistemul de inecuatii $\begin{cases} 2x+3>5 \\ 7-4x \leq 4 \end{cases}$.

8. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $y = 3x - 1$, $y = ax + 4$, $y = 8 - x$ să fie concurente.

9. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 6, g(x) = x + 6a - 2$ să verifice relația: $f \circ g = g \circ f$.

Testul 5

1. Să se discute ecuația $(m^2 - 4) x + (m + 2) = 0$, unde m este un parametru real.

2. Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația $(2m + 1)x - 5 = 0$ să aibă o soluție întreagă.

3. Stabiliți $D \subset \mathbb{R}$ domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\dfrac{4+x}{1-3x}}$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 2$. Calculați $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}$.

5. Rezolvați inecuația $\dfrac{8-9x}{|x+3|} \leq 0$.

6. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x+4y=7 \\ ax-2y=3 \end{cases}$ să aibă o infinitate de soluții.

7. Arătați că dreptele de ecuații d_1: $x + y - 2 = 0$, d_2: $2x - y - 1 = 0$ și d_3: $7x + y - 8 = 0$ sunt concurente.

8. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x-1}{x+2} \in (1, 3)$.

9. Considerăm funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = 6x + 7$. Determinați a și b astfel încât $\text{Im} f = [-1, 3]$.